Reptes

Problemes

Juanjo Rué (UPC)

En aquesta edició 46 del *SCM/Notícies* tindrem dos problemes de geometria (proposats per en Miquel Amengual i Joaquim Nadal i Vidal, desde Cala Figuera a Mallorca i Llagostera, respectivament.)... i un problema extra de geometria proposat pel nostre infatigable col·laborador José Luis Díaz Barrero (i com el lector pot sospitar, serà un problema de desigualtats geomètriques). Finalment, l'Oscar Rivero ens proposa un problema d'aritmètica que de segur ens costarà una estona de resoldre. Els agraïm a tots la col·laboració en la proposta de material per aquesta secció.

Quant a les solucions dels problemes proposats en el número anterior: en aquest cas els nostres perseverants lectors han aconseguit resoldre tots els problemes. Entre ells, cal donar les gràcies a Antoni Gomà, Esteve Casas, Ernest Garriga, Miquel Amengual, Josep Maria Brunat i Juan Monterde, que ens han proporcionat a la redacció una àmplia varietat de les solucions dels problemes proposats. A tots ells, moltes gràcies per haver dedicat una estona a resoldre els enigmes matemàtics plantejats fa uns mesos!

Com sempre, i per acabar aquest preàmbul i abans d'endinsar-nos en els problemes: l'adreça electrònica per enviar tant les solucions com les propostes de problemes és la següent:

`juan.jose.rue@upc.edu`

El material ha de ser enviat preferiblement en TEX o LaTEX, i cal adjuntar (si escau per al problema en consideració) les figures geomètriques corresponents.

Problemes proposats:

A161. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui un punt P del costat AB d'un triangle $\triangle ABC$. Traceu per P una recta que talli el costat CA en el punt Q tal que la longitud del segment PQ sigui igual a la suma de les longituds dels segments de les perpendiculars tirades a BC per P i Q.

A162. (Proposat per Oscar Rivero Salgado, UPC, Barcelona.)

(a) Proveu que existeixen infinits nombres enters positius que no es poden representar de la forma $a^2 + b^3$, on a i b són també enters positius.

(b) Sigui n un nombre enter i p un primer. Proveu que sempre existeixen enters positius a i b de manera que $a^2 + b^3 - n$ és múltiple de p.

A163. (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.)

Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle $\triangle ABC$ amb àrea S, circumradi R i semiperímetre p. Demostreu que

$$\frac{(p-a)^4}{c(p-b)} + \frac{(p-b)^4}{a(p-c)} + \frac{(p-c)^4}{b(p-a)} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{RS}{2}\right)^{2/3}.$$

A164. (Proposat per Joaquim Nadal Vidal. Llagostera, Girona.)

A l'interior d'un triangle $\triangle ABC$ dibuixem un triangle $\triangle A'B'C'$ amb els costats paral·lels als del triangle inicial (i per tant semblants) de manera que existeixin punts L, M, N situats sobre AB, BC i CA respectivament tals que els triangles $\triangle A'B'L$, $\triangle B'C'M$ i $\triangle C'A'N$ són equilàters. Trobeu el màxim valor de la raó de semblança k entre $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$.

Solucions:

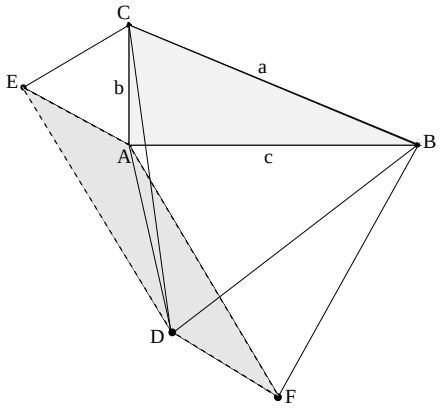
A157. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sobre els costats AB, BC i CA d'un triangle rectangle $\triangle ABC$, amb l'angle recte en A, es construeixen triangles equilàters $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$. Els triangles $\triangle ABF$ i $\triangle CAE$ a l'exterior de $\triangle ABC$ i, interiorment, el triangle $\triangle BCD$.

Provau que el quadrilàter $\square AEDF$ i el triangle $\triangle ABC$ tenen la mateixa àrea.

Solució: (Solució d'Ernest Garriga, Centre Sant Pau, Mataró.)

Denotem per $\widehat{B}$ l'angle $\widehat{ABC}$ en el triangle inicial $\triangle ABC$. Denotem també per $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ i $c = \overline{AB}$ les longituds dels costats del triangle $\triangle ABC$. En la figura següent tenim la construcció geomètrica considerada:



De $\widehat{CBF} = \widehat{B} + 60° = 60° + \widehat{FBD}$ resulta $\widehat{FBD} = \widehat{B}$. A més $\overline{BF} = c$ i $\overline{BD} = a$. De manera que $\triangle BDF = \triangle ABC$ i, en particular, $\widehat{DFB} = 90°$, $\overline{DF} = b$ i $\widehat{DFA} = 90° - \widehat{BFA} = 90° - 60° = 30°$. L'àrea del triangle $\triangle FAD$ és doncs $S_1 = \frac{1}{2}\overline{FD}\ \overline{FA}\sin 30° = \frac{1}{4}bc$.

Mutatis mutandis, l'àrea de $\triangle EDA$ és $S_2 = \frac{1}{2}\overline{ED}\ \overline{EA}\sin 30° = \frac{1}{4}cb$. Per tant l'àrea de $\square AEDF$ és $\frac{1}{2}bc$, que és l'àrea de $\triangle ABC$. De $\widehat{AED} = \widehat{DFA} = 30°$, resulta que el quadrilàter $\square AEDF$ és un paral·lelogram, de costats els catets de $\triangle ABC$. El seu angle agut és de 30° independentment del triangle rectangle de partida.

A158. (Proposat per la redacció.)

Un conjunt finit de nombres enters no negatius A es diu que és *avariciós* si $|A| \in A$. Un conjunt avariciós A és minimal si cap subconjunt de A és avariciós.

Trobeu el nombre de subconjunts avariciosos minimals de $\{1, \ldots, n\}$.

Solució: (Solució de Josep Maria Brunat, professor jubilat de la UPC, Barcelona.)

Posem $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Sigui $V(n)$ el conjunt format pels subconjunts avariciosos de $[n]$ i $A(n)$ el format pels subconjunts avariciosos minimals de $[n]$. Volem calcular $a_n = |A(n)|$. Per exemple,

n	$V(n)$	$A(n)$	a_n
1	$\{\{1\}\}$	$\{\{1\}\}$	1
2	$\{\{1\},\{1,2\}\}$	$\{\{1\}\}$	1
3	$\{\{1\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1\},\{2,3\}\}$	2

Per l'argument que segueix només els valors $a_1 = a_2 = 1$ són rellevants. Sigui $n \geq 3$. Definim

$$A'(n) = \{X \in A(n) : n \notin X\},$$
$$A''(n) = \{X \in A(n) : n \in X\}.$$

Certament, $A(n) = A'(n) \cup A''(n)$ i $A'(n) \cap A''(n) = \emptyset$, per la qual cosa

$$a_n = |A(n)| = |A'(n)| + |A''(n)|.$$

Demostrarem que $|A'(n)| = a_{n-1}$ i que $|A''(n)| = a_{n-2}$. Per començar, els conjunts avariciosos minimals que no contenen n són, exactament, els conjunts avariciosos minimals de $[n-1]$. Per tant,

$$|A'(n)| = |A(n-1)| = a_{n-1}.$$

Sigui

$$W(n) = \{X \in V(n) : 1 \notin X,\ n \in X\}.$$

Veurem que $A''(n) \subseteq W(n)$. Sigui $X \in A''(n)$. Per definició $n \in X$ i X és avariciós. No pot ser $X = [n]$ perquè $[n]$ té subconjunts propis avariciosos i, per tant, no és minimal. Així, $c = |X| < n$. Per tant, X conté, almenys, dos elements diferents, c i n. Si $1 \in X$, llavors $\{1\}$ és un subconjunt propi de X (perquè X té almenys dos elements) i és avariciós, en contra de la minimalitat de X. Concloem, doncs, que $1 \notin X$ i, per això, que $A''(n) \subseteq W(n)$. Per a cada $X \in V(n-2)$, sigui $X + 1 = \{x + 1 : x \in X\}$. Definim l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} f\colon V(n-2) & \to & W(n) \\ X & \mapsto & f(X) = (X+1) \cup \{n\} \end{array}$$

Evidentment, per a $X \in V(n-2)$, tenim $1 \notin f(X)$ i $n \in f(X)$. A més, $f(X)$ és avariciós: com que $|X| \in X$,

$$\begin{aligned} |f(X)| &= |(X+1) \cup \{n\}| = |X+1| + 1 \\ &= |X| + 1 \in X + 1 \subset f(X). \end{aligned}$$

Així, $f(X) \in W(n)$ i f està ben definida. Òbviament és injectiva. També és exhaustiva: Si $Y \in W(n)$, el cardinal de Y no és n perquè $1 \notin Y$. Per tant, Y és de la forma $Y = (X+1) \cup \{n\}$ per a algun $X \subseteq [n-2]$. Si $c = |X|$, tenim $c + 1 = |Y| \in Y$ i $c + 1 < n$, cosa que implica $c + 1 \in X + 1$. Per tant $|X| = c \in X$ i veiem que $X \in V(n-2)$.

Tenim, doncs, que f és una bijecció. A més, per a tot $X_1, X_2 \in V(n-2)$, es compleix $X_1 \subseteq X_2$ si, i només si, $f(X_1) \subseteq f(X_2)$. Això implica que hi ha bijecció entre els conjunts minimals de $V(n-2)$, que formen $A(n-2)$, i els conjunts minimals de $W(n)$, que formen $A''(n)$. Per tant,

$$|A''(n)| = |A(n-2)| = a_{n-2}.$$

Llavors,

$$a_n = |A(n)| = |A'(n)| + |A''(n)| = a_{n-1} + a_{n-2},$$

fet que, juntament amb els valors inicials $a_1 = a_2 = 1$, ens dona que $(a_n)_{n \geq 1}$ és la successió de

Fibonacci, els termes de la qual, com és sabut, tenen per fórmula explícita

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

A159. (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)

Siguin x_1, x_2, x_3, x_4 nombres reals positius amb producte igual a 1. Trobeu el valor mínim de

$$\sum_{\text{cic}} \frac{1}{x_1^3(x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2)},$$

on $\sum_{\text{cic}}$ indica la suma cíclica sobre els índexs.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, Sant Celoni.)

En primer lloc fem el canvi de variable $x_i = \frac{1}{y_i}$ i, tenint en compte $x_1x_2x_3x_4 = 1$, el que cal buscar és el mínim de l'expressió.

$$\sum_{\text{cic}} \frac{y_1^2}{y_2 + y_3 + y_4}$$

Per fer-ho tindrem en compte la propietat $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}$, que es generalitza a una suma de la forma $\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n}$ on les a_i són nombres reals qualsevol i les b_i reals positius. Vegem-ho:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} - \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2} = \frac{(a_1b_2 - b_1a_2)^2}{b_1b_2(b_1+b_2)} \geq 0,$$

i, aplicant inducció, en general tenim que

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} &\geq \frac{(a_1^2+a_2)^2}{b_1+b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \\ &\geq \frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{b_1+\ldots+b_n}.\end{aligned}$$

Aplicant-ho al nostre problema podem veure que ens queda la desigualtat.

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cic}} \frac{y_1^2}{y_2+y_3+y_4} &\geq \frac{(y_1+y_2+y_3+y_4)^2}{3(y_1+y_2+y_3+y_4)} \\ &= \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3+y_4)\end{aligned}$$

Buscarem, doncs, un mínim de l'expressió $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ sotmesa a la condició $y_1y_2y_3y_4 = 1$. Si tinguéssim dues variables, l'expressió anterior equival a trobar, entre els rectangles de volum donat (igual 1 en el nostre cas), aquell en que la suma dels seus costats sigui mínima. Com sabem és el quadrat. Si ho generalitzem a dimensió n (igual a 4 en el nostre cas) veurem que el mínim s'obté en ser tots els costats iguals (obtenint un hipercub).

Suposada correcte l'afirmació el mínim de la nostra desigualtat s'obté fent $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$, que és també assolit per l'expressió inicial de les $y's$.

Per justificar la generalització a dimensió n usarem la inducció: mantenim fixe el valor y_1 i suposem vàlida l'afirmació per $n-1$, és a dir, el mínim de $y_2 + \ldots + y_n$, amb $y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1/y_1$ ens ve donat per $y_2 = \ldots = y_n = \sqrt[n-1]{1/y_1}$. Fent variar y_1, ens cal determinar el mínim de $y_1 + (n-1)\sqrt[n-1]{y_1}$, que s'obté fent $y_1 = 1 = y_2 = \ldots = y_n$.

Retornant finalment a les variables x_i, prenen totes el valor 1, i això dona la solució del problema (4/3). Notem que, a més, és el mínim, perquè prenent tots els valors de y iguals, les desigualtats de fet són igualtats, i per tant aquest mínim es pot assolir.

A160. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera.)

En el triangle $\triangle ABC$, siguin A', B', C' tres punts situats sobre BC, AC i AB, respectivament. Suposseu que $AC' = p \cdot AB$, $BA' = q \cdot BC$ i $CB' = r \cdot AC$. Sigui S l'àrea del triangle $\triangle ABC$ i S' l'àrea del triangle $\triangle A'B'C'$.

Demostreu que:
si $p + q + r = 1$, aleshores $\frac{S}{S'} \geq 3$.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Demostrarem la desigualtat següent, més general,

$$\frac{S}{S'} \geq \frac{3}{(p+q+r)(p+q+r-3)+3}, \qquad (1)$$

d'on es deduirà el resultat que volem veure i que la igualtat és assolible si i només si $p = q = r$.

Comencem veient que es compleix la desigualtat següent:

$$(p+q+r)^2 \geq 3(pq+qr+rp), \qquad (2)$$

on p, q, r són nombres reals qualssevol i la igualtat només val si $p = q = r$. En efecte: partim de la desigualtat òbvia

$$(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2 \geq 0, \qquad (3)$$

que es pot escriure, d'una manera equivalent, com a:

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq pq + qr + rq,$$

i sumem-hi als dos membres el terme $2(pq+qr+rp)$. Tindrem que

$$p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2qr + 2rp \geq 3(pq+qr+rp),$$

equivalent a (2), on la igualtat esdevé si, i només si, la igualtat s'ateny a (3), i.e., si, i només si, $p = q = r$.

Tornem al problema geomètric. Atès que l'àrea del triangle $\triangle ABC$ donat a l'enunciat és igual a la suma de les àrees dels triangles $\triangle A'B'C'$, $\triangle AC'B'$, $\triangle BA'C'$ i $\triangle CB'A'$, i tenint en compte que l'àrea d'un triangle s'obté com la meitat dels producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen, tindrem:

$$S = S' + \frac{1}{2} AB' \cdot AC' \cdot \sin \widehat{A} + \frac{1}{2} BC' \cdot BA' \cdot \sin \widehat{B} + \frac{1}{2} CA' \cdot CB' \cdot \sin \widehat{C}.$$

Ara bé, de les relacions $AC' = p \cdot AB$, $BA' = q \cdot BC$, $CB' = r \cdot AC$, se'n dedueix $BC' = (1-p)\, AB$, $CA' = (1-q)\, BC$, $AB' = (1-r)\, CA$. Substituint aquestes relacions en (4) i tenint present que $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} BC \cdot BA \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin \widehat{C}$, es té

$$S = S' + (p\,(1-r) + q\,(1-p)\, r + (1-q))\, S.$$

D'aquí aïllem S',

$$S' = (pq + qr + rp - p - q - r + 1)\, S.$$

Tenint present (2), la relació anterior ens donarà

$$S' \leq \left(\frac{(p+q+r)^2}{3} - p - q - r + 1 \right) S.$$

Aquesta desigualtat, dividida per

$$\left(\frac{(p+q+r)^2}{3} - p - q - r + 1 \right) S' = \frac{1}{3} \left(\left(p + q + r - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) S' > 0,$$

esdevé

$$\frac{S}{S'} \geq \frac{1}{\frac{(p+q+r)^2}{3} - p - q - r + 1},$$

equivalent a (1). Finalment, podem tornar a la desigualtat desitjada com a conseqüència dels nostres resultats: per a $p + q + r = 1$, s'obté el cas de l'enunciat.

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Vam dedicar el número anterior als nombres naturals. Un dels enigmes, per exemple, era «Professors de matemàtiques». La resposta és *dos-cents*, que en català occidental sona igual que *docents*.

En aquesta ocasió continuem amb els nombres, amb l'única diferència que les respostes són nombres de tot tipus, però *no naturals*, la qual cosa potser farà els enigmes una mica més difícils. Igualment, no especificarem el nombre de lletres de la solució.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[15]

Trobeu els **nombres no naturals** amagats dins les definicions següents:

(a) Quantitat de medicament que s'ha d'administrar
(b) Endrapo
(c) Prestació dels aprenents de soldat
(d) El teixit més llis i lluent
(e) No hi serem tots
(f) Lamenti
(g) Agafi fraudulentament una part
(h) Oi?

[15] Respostes als Matemots: (f) 100 i; (c) 1000 i; (e) 1/9; (h) e; (b) -1; (g) 6i; (a) 2i; (d) 7i.